高大連携の数学
― 複素数・複素数平面・複素関数論のつながり ―

上 野 祐 一 ・ 村 瀬 雅 俊

要旨：中学校数学で初めて負の数を扱い，（負の数）×（負の数）が（正の数）になることを学習する．すなわち，実数の世界において 0 以外の数を 2 乗することによりどんな数でも正の数になる．

本稿では，高等学校数学で導入される 2 乗すると -1 となる新しい数（虚数単位），そして複素数について考える．整数から有理数，有理数を拡張して実数が構成されていったように，実数を複素数まで拡張することによる良さについて考察していく．

複素数を扱うことの良さはたくさんあるが，実数の世界で扱っている微分積分学の理論をそのまま複素数の世界に応用することができたり，複素数の微分積分学（複素関数論という）でしか成り立たたない特徴的な性質も見ることができる．それらの性質について，高等学校数学の知識でも理解できるような内容を扱いながら，その有用性について見ていく．

キーワード：複素数，複素数平面，複素関数論，実積分，複素積分，留数定理

Ⅰ．はじめに

数学の一つの分野である解析学は自然現象を調べるというところから始まったと言われている．そのため，関数は自然現象を表すものとして現れ，その変数は時間変数 t であったり，場所を表す $(x,\ y,\ z)$ で表すことが多い．時間や場所は実数で表されるため，関数は実数を変数とするもので書くことができる．そういうわけで 2 乗すると負になるような数は考えられても空想の世界だということであまり相手にはされていなかった．

しかし実際，数には実数の他にも複素数という数が存在する．これは16世紀の初頭に 3 次方程式の解の公式が発見され，その解の公式を記述するにはどうしても 2 乗すると負になる数が必要だった．そのような理由により，最初は相手にされていなかった複素数も多くの人たちから市民権を得られるようになり，実数の範囲だけでは解を持たない代数方程式が解を持つために作られた数だと言われている．例えば，2 次方程式

$$x^2+1=0$$

は実数の範囲では解を持たない．ここで，$i^2=-1$ という数「i」が存在すると仮定すると，この 2 次方程式は

$$x=\pm i$$

という実数ではない 2 つの解を持つ．そして，この「i」を用いることにより，どんな 2 次方程式も必ず 2 つの解を持つことが分かる．このように 2 つの実数 a，b を用いて

$$a+bi$$

と表される数のことを複素数と呼ぶ．特に $b=0$ とすると複素数 $a+bi$ は実数 a となるため，実数は複素数の一部であることが分かる．このように，複素数まで数の範囲を拡張することにより，実数係数とする代数方程式は必ず解を持つことを示すことができる．これはガウスによって証明され「代数学の基本定理」と呼ばれている[5]．

また，複素数と座標 (xy) 平面上の点を１対１に対応させた平面を複素数平面と呼ぶ．複素数平面を用いることにより，図形的（幾何的）に複素数の演算をとらえることができる．例えば，複素数どうしの和はベクトルどうしの和として考えることができ，また複素数をかけることは原点を中心とする回転と原点を中心とする相似拡大（縮小）の合成で表すことができる．

以上が，高等学校の数学で学ぶ複素数や複素数平面を学ぶ良さである．一方，今回の学習指導用要領改訂に伴い，高等学校では2022年度入学生より新学習指導要領が全面実施となる．新学習指導要領は，内容の系統性と生徒選択の多様性に配慮して科目を構成され，以下のように変更された．

＜新学習指導要領＞

科目（単位数）	内　　容	科目構成の考え方
数学Ⅰ（３）	数と式 図形と計量 ２次関数 データの分析	・中学校との接続に配慮した内容で構成． ・この科目だけで高等学校数学の履修を終える生徒，引き続き数学を履修する生徒の双方に配慮し，すべての生徒の数学的に考える資質･能力の基礎を養う．
数学Ⅱ（４）	いろいろな式 図形と方程式 指数関数・対数関数 三角関数 微分・積分の考え	・高等学校数学の根幹をなす内容（数学Ⅰの内容を発展・拡充させることができるようにするとともに，数学Ⅲへの系統性を踏まえた内容）で構成． ・より多くの生徒の数学的に考える資質･能力を養う．
数学Ⅲ（３）	極限 微分法 積分法	・微分法，積分法の基礎的な内容で構成． ・数学に強い興味や関心をもってさらに深く学ぼうとする生徒や将来数学が必要な専門分野に進もうとする生徒の数学的に考える力を伸ばす．
数学Ａ（２）	図形の性質 場合の数と確率 数学と人間の活動	・数学Ⅰの内容を補完． ・数学のよさを認識し，数学的に考える資質・能力を養う．
数学Ｂ（２）	数列 統計的な推測 数学と社会生活	・数学の知識や技能などを活用して問題解決や意思決定をすることなどを通して数学的に考える資質・能力を養う．
数学Ｃ（２）	ベクトル 平面上の曲線と複素数平面 数学的な表現の工夫	・数学的な表現の工夫を通して数学的に考える資質・能力を養う．
理数探究・理数探究基礎（新設）		

また，改訂にポイントとしては

- 数学活用を廃止し，理数探究・理数探究基礎の新設
- 数学Ｃを新たに設け，数学活用の内容を数学Ａ，数学Ｂ，数学Ｃに移行
- 統計的な内容の充実

　　数学Ⅰ：「データの分析」に「仮説検定の考え方」を新設

　　数学Ａ：「場合の数と確率」に「期待値」を新設（数学Ｂから移行）

　　数学Ｂ：「統計的な推測」に「仮説検定」を新設

である．各科目の履修順序としては

- 数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲは，原則この順に履修させる
- 数学Ａは原則，数学Ⅰと並行して，あるいは数学Ⅰを履修した後に履修させる
- 数学Ｂ，数学Ｃは原則，数学Ⅰを履修した後に履修させる

  （数学Ｂと数学Ｃは履修の順序で構成されるものではなく，内容のまとまりで構成されている．このため，数学Ｂと数学Ｃを並行して履修することや数学Ｂを履修せずに数学Ｃを履修することなども可能である．）

となっている．

さらに理数探求や理数探求基礎が新設されることにより，より一層探究的な活動が求められることとなる．新課程において，統計的な内容が充実されるようになったのもこれからの時代，ビッグデータ等を扱わなければならなくなるため，観察・実験や調査のデータについて統計的な処理の仕方が大切になる．

一方で，現行課程数学Ｂにあったベクトルが新課程では数学Ｃに移行されることにより，文系の生徒はベクトルを学習しなくなる可能性がある．上述したように，数学に限らず理科（特に物理）においてベクトルはとても便利な手段であり，様々なところで活用することができる．また，行列の知識があることで回転を含め扱えることが増えるが，今回の改訂において復活することはなかった．

高等学校数学では実数を実数に対応させる実関数しか扱わなかったのに対して，大学へ進学すると複素数を複素数に対応させる複素関数についても学ぶ．合わせて複素微分についても学ぶことで，正則関数，コーシー・リーマンの関係式など複素関数論を学ぶ上での必要不可欠の基礎事項を知る．そして，複素関数論において基本となるコーシーの積分定理とコーシーの積分公式を導き，留数定理を学ぶ．この留数定理を学ぶことにより，通常の微分積分では複雑な積分をしなければならないような実関数の積分を，比較的容易に求めることができるようになる．高等学校数学において実数を複素数に拡張することにより，扱えることが多くなったのと同じように，実変数を複素変数に拡張することにより，実変数の解析にも非常に役立つことが分かる．

本稿では，筆者（上野）が高等学校での経験，もう一人の筆者（村瀬）の大学での経験を踏まえ，高等学校で学習する複素数や複素数平面，大学で学習する基本的なところの（複素）関数論を用いて，その繋がりについて振り返り，高等学校段階で扱えるような複素関数論を用いた積分について考察し，今後の高等学校の探究活動（理数探求・理数探求基礎）についての一つのきっかけにしたい．

Ⅱ．高等学校における複素数，複素数平面の取扱い

ここでは，現行の高等学校数学科の教科書をもとにして高等学校で学習をする複素数（数学Ⅱ）や複素数平面（現行では数学Ⅲ，新課程においては数学Ｃ）の内容について系統的に見ていき，特にポイントとなる問題について触れる．

（1）数学Ⅱ　複素数と方程式

高等学校学習指導要領解説[2]には「数を複素数まで拡張する意義を理解し，複素数の四則計算をするとともに，二次方程式の解の種類の判別及び解と係数の関係について理解すること」「因数定理について理解し，簡単な高次方程式について因数定理などを用いてその解を求めること」とある．ここでのポイントは以下の３点である．

① 数学Ⅰにおいては，実数の範囲で二次方程式を取り扱ったのに対して，ここでは数の範囲を実数から複素数へ拡張することにより，複素数においても四則演算ができるようにする．

② 複素数の範囲で実数係数の二次方程式の解の公式や解の種類の判別を取り扱う．

③ 多項式 A を多項式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，

$$A = BQ + R \quad （ただし，（R の次数）<（B の次数））$$

という関係式の基づき，剰余の定理や因数定理を導いたり，因数定理や因数分解の公式を用いて因数分解できるような簡単な高次方程式を解くことで解を求めることができるようにする．

上記のことを学習することにより，3次方程式，4次方程式といった高次方程式の解法について学ぶことにより，代数学の基本定理について触れることも可能になり，実際に3次方程式や4次方程式の場合において，複素数まで拡張することにより実際に確認することができる．代数学の基本定理についてはⅢで詳しく述べる．

では具体的に，教科書で扱われている数学Ⅱ「複素数と方程式」において抑えるべき問題を見ていく．

問題1	2次式 $2x^2-2x+3$ を複素数の範囲で因数分解せよ．
問題2	3次方程式 $x^3=1$ を解け．
問題3	3次方程式 $x^3+4x^2-8=0$ を解け．
問題4	4次方程式 $x^4-2x^3+x^2-2=0$ を解け．

このような問題を扱う中で，3次方程式には常に3個，4次方程式は常に4個の解を持つことを確認し，一般に n 次方程式は，複素数の範囲で常に n 個の解を持つことを紹介している．すなわち，数学Ⅱの段階においては複素数の初歩の段階として，2乗すると -1 になる数を1つ考え，これを i で表し，これを虚数単位と呼ぶことから始めている（問題1）．すなわち，

$$i^2=-1$$

や

$$a > 0 \quad のとき，\sqrt{-a}=\sqrt{a}i \quad 特に \quad \sqrt{-1}=i$$

と定めることで数の範囲を複素数まで拡張することができることを学ぶ．そして，代数学の基本定理が成り立つことを実際に方程式（問題2，3，4）を解くことで確認している．

（2）数学Ⅲ（数学C）　複素数平面

[2]には「複素数平面と複素数の極形式（Def 2.1），複素数の実数倍，和，差，積及び商の図形的な意味（Fact 2.1，2.2）を理解するとともに，複素数平面における図形の移動などと関連付けて複素数の演算などの意味を考察すること」「ド・モアブルの定理（Thm 2.1）について理解するとともに，複素数平面における図形の移動などと関連付けて，累乗根の意味を考察すること」とある．

数学Ⅱにおいて，虚数単位 i や複素数が $a+bi$ を導入した．ここでは，その導入した複素数と座標平面上の点を対応させることにより複素数平面を導入し，図形の移動などと関連付けながら複素数の演算の意味を考察する（問題5～7）．その際，数学Ⅱで学習する三角関数や数学B（新課程では数学Ⅲ）で学習するベクトルと関連付けることが可能である．

また，極形式による複素数の積の一般化として，ド・モアブルの定理を導くことにより，方程式 $z^n=1$ の解を複素数平面上に図示することにより，1の n 乗根が単位円周上にあり，点1を頂点の一つとする正 n 角形の頂点を表す複素数であることが理解でき（問題8，9），幾何的に代数学の基本定理を確認することにもつながる（問題10）．

Definition 2.1　P：複素数平面上で0でない複素数 $z=a+bi$ を表す点，r：線分OPの長さ，
θ：実軸の正の部分から半直線までの回転角　とすると，

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

より，z は次の形に表される．

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \quad \text{ただし，} r>0$$

これを複素数 z の極形式という．ここで，r は z の絶対値に等しい．

また，角 θ を z の偏角といい，$\arg z$ と表す．すなわち，

$$r=|z|,\ \theta=\arg z$$

Note 2.1　複素数 z の偏角 θ は，$0\leq\theta<2\pi$ の範囲ではたた一通りに定まる．

Fact 2.1（複素数の積と絶対値，偏角）　$\boldsymbol{z_1}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\boldsymbol{z_2}=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とする．このとき，次が成り立つ．

1．$z_1z_2=r_1r_2\{(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
2．$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
3．$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$

Fact 2.2（複素数の商と絶対値，偏角）　$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$
2．$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
3．$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$

Fact 2.3　複素数 z と $\cos\theta+i\sin\theta$ に対して，点 $(\cos\theta+i\sin\theta)z$ は，点 z を原点を中心として角 θ だけ回転した点である．

Theorem 2.1（ド・モアブルの定理）　n：整数 のとき

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

Fact 2.4（1 の n 乗根）　自然数 n に対して，1 の n 乗根は，次の n 個の複素数である．

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin 2k\pi n\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

問題 5　複素数 $1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ．

問題 6　複素数 $z_1=1+i$，$z_2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ に対して，z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$ をそれぞれ極形式で表し，また，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ．

問題 7　複素数平面上の 3 点 O(0)，A$(3+i)$，B について，△OAB が正三角形となるとき，点 B を表す複素数を求めよ．

問題 8　$(\sqrt{3}+i)^{12}$ を計算せよ．

問題 9　1 の 8 乗根を求め，1 の 8 乗根を表す点を複素数平面上に図示せよ．

問題10　方程式 $z^2=1+\sqrt{3}i$ の解を求めよ．

問題11　方程式 $|z+3|=2|z|$ を満たす点 z 全体はどのような図形か．

問題12　点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 -4 と点 z を結ぶ線分の中点 w はどのような図形を描くか．

（3）複素数，複素数平面を扱うことのメリット

（1），（2）で見てきたように，複素数平面を導入することにより，今まで学習してきた座標平面と複素数とを対応させることができ，図形的に複素数の演算をとらえることができる．そして，最終的には複素数平面を考えることで「複素数の積」が「回転」に対応することが分かる．高等学校数学において，「回転」を扱うことができる分野は現状はこの複素数平面のみである（行列が復活すれば行列でも可能）．そういった意味において複素数や複素数平面を学ぶことには非常に意味がある．ただし逆に言うと，高等学校の段階において複素数平面を学ぶメリットとしては回転を扱えることが主な良さとなっており，それ以外のよさについては現状扱うことが難しい状況である．

上記の問題11，12のような問題も複素数平面では頻出の問題であるが，生徒たちは問題を解く方法にばかり目がいき，本来のよさについてあまり考えようとしない．この問題であれば

（ⅰ）複素数 z のまま計算し，等式の図形的な意味を考える

（ⅱ）$z=x+yi$ と置き換え，今まで学習してきた座標平面の問題に直して計算する

ような解法が考えられる．問題としてそんなに難しい問題ではないが，この問題の背景には複素関数論における初等関数による写像や等角写像の理論がある[8]．これらは，1次分数変換（メビウス変換）などとも関係しており，行列の性質とも深く関係している内容になっている．

また，極形式からド・モアブルの定理と学習することにより，次で述べる三角関数のマクローリン展開（Ex 3.1）を用いることにより，オイラーの公式（Fact 2.5）が成り立つことや，「三角関数の加法定理」と「指数関数の指数法則」と同一視することも可能である[7]．

Fact 2.5（オイラーの公式）　実数 θ に対して

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

以上のような理由から，実数から範囲を広げて複素数を扱うことで見通しがよくなることがたくさんある．ここでは，その中でも高等学校（数学Ⅲ）で扱うことができるような実関数の定積分で，複素数の世界に範囲を広げて考えることで簡単に値を求められるものが存在することを紹介する．

Ⅲ．大学数学で学ぶ複素関数論

Ⅱ（3）で述べたように，実数から複素数へ範囲を拡張することにより，実積分では計算が大変なものでも複素積分で考えることにより簡単に定積分を求めることができる場合がある．これは複素関数論の留数定理という強力な定理によるものである．ここでは，留数定理を導くまでの手順を以下Ａ～Ｆに沿って紹介する．この章の内容は[5][6][7][8]を参考にした．詳しい証明等は[5][6][7][8]を参照のこと．

Ａ．複素変数による複素関数の微分

Definition 3.1　関数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$：実数値関数（ただし，z：複素変数）

この2つの関数を用いて，複素関数 $F(z)$ を複素変数 $z=x+iy$ で微分するとき，微分 $\dfrac{d}{dz}F$ を次で定義する．

$$\frac{dF}{dz}\coloneqq\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\quad(3\text{-}1)$$

$f(z)$：微分後の関数　とすると　$F'(z)=f(z)$　とかける．この関数 $F(z)$ を原始関数と呼ぶ．

cf.　(3-1)式の複素変数 z を実変数 x に置き換えると高等学校で学習する実数の微分になる．

Definition 3.2　複素関数 $F(z)$ が微分可能 $\Leftrightarrow$ $z+\Delta z$ が z に近づく方向によらず(3-1)式が同じ値をとる

このとき，$F(z)$ を正則関数（解析関数）と呼ぶ．また，微分可能であることを正則（解析的）であると表現する．

Note 3.1　複素平面上のある点 z_0 において微分不可能のとき，この点を特異点と呼ぶ．

Proposition 3.1　関数 $F(z)$ が正則であるとき，次が成り立つ．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

この２つの関係式をコーシー・リーマンの関係式（方程式）と呼ぶ．

∵　題意より，関数 $F(z)$ が正則であるので，(3-1)の微分も $\Delta z \to 0$ の近づき方によらない．
したがって，

①　y を固定（すなわち $\Delta y=0$）とし，x だけ変化させると

$$\frac{dF}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

②　x を固定（すなわち $\Delta x=0$）とし，y だけ変化させると

$$\frac{dF}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta F}{i\Delta y}=\frac{\partial F}{i\partial y}=\frac{\partial \phi}{i\partial y}+i\frac{\partial \psi}{\partial y}=-i\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

正則関数であるので，これらの２つは一致するので

$$\frac{dF}{dz}=\frac{\partial \phi}{\partial x}+i\frac{\partial \psi}{\partial x}=-i\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

これらの実部，虚部を比べることにより，主張が成り立つ．　■

B．複素関数の積分

$f(z)$：被積分関数（実数値関数）　ただし，z：複素変数

ここで，次の積分 $\int_g^h f(z)\,dz$ について考える．

（ｉ）積分変数 z が実数値のみのとき

複素変数 $z=x+iy$ とすると，実軸上において常に $y=0$ であるので

$$\int_g^h f(z)\,dz=\int_g^h f(x+iy)\,dz=\int_g^h f(x)\,dx$$

となり，複素数平面上においては実軸の上だけに存在したことになる．

（ⅱ）積分変数 z が複素変数のとき

変数 z は複素数であるので積分経路は（ｉ）の場合と異なり，実軸の上には限定されない．

C：点Ｐから点Ｑへの曲線

$$\Sigma_C f(z)\Delta z \quad (3\text{-}2)$$
$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

ここで，Δz ：無限小に小さくとると　$\Delta z \to dz$ となり

$$(3\text{-}2) \to \int_C f(z)\,dz \quad \text{または} \quad \int_P^Q f(z)\,dz$$

と表すことができる．また，

$g(z)$：複素関数 $f(z)$ の実部の実数値関数，$h(z)$：複素関数 $f(z)$ の虚部の実数値関数　とすると，

$$f(z)=g(z)+ih(z)$$

(3-2)へ代入すると

$$\sum_C f(z)\Delta z=\sum_C \{g(z)+ih(z)\}\Delta z=\sum_C \{g(z)+ih(z)\}(\Delta x+i\Delta y)$$

　ここで，先ほどと同様に Δz ：無限小に小さくとると，Δx，Δy も無限小となり，

$$\Delta x \to dx,\ \Delta y \to dy$$

となるので

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C \{g(z)+ih(z)\}\{dx+dy\}=\int_C \{g(z)\,dx-h(z)\,dy\}+i\int_C \{g(z)\,dy+h(z)\,dx\}$$

が成立する．

　また，次も成立する．

Fact 3.1　滑らかな曲線 C：$z=z(t)$（$a\leq t\leq b$）上で連続な関数 $f(z)$ に対して，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}dt$$

が成り立つ．

C．コーシーの積分定理

Theorem 3.1　関数 $f(z)$：領域 D の内側で正則　$f'(z)$：連続とする．このとき，領域 D の内で正則な複素関数 $f(z)$ を単純閉曲線（途切れない閉じた曲線）に沿って，周回積分（閉曲線に沿ってぐるっと１周回るもの）するとき，次が成り立つ．

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

もしくは

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

これを**コーシーの積分定理**と呼ぶ．ただし，積分経路として，閉曲線の内側を左に見る方向にたどるものとする．

Note 3.2　コーシーの積分定理においては，関数 $f(z)$ が閉曲線 C の上とその内部において正則であり，導関数 $f'(z)$ が連続という条件が付く．しかし，導関数 $f'(z)$ が連続という条件がなくても成り立つことが知られている．

Theorem 3.2　領域 D の内で正則な複素関数 $f(z)$ を単純閉曲線（途切れない閉じた曲線）に沿って，周回積分（閉曲線に沿ってぐるっと１周回るもの）するとき，次が成り立つ．

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

もしくは

$$\oint_C f(z)\,dz=0$$

これを**コーシー・グルサの積分定理**と呼ぶ．

次に，このコーシーの積分定理を用いて，複素積分特有の関係を導く．

①　複素積分の値は経路によらないこと

Proposition 3.2　複素平面上の点Aから点Bへの積分は，領域 D 内での経路によらない．
∵　関数 $f(z)$：領域 D で正則　C：単純閉曲線　とし，C に沿った A → P → B → Q → A をたどる周回積分を考える．コーシーの積分定理により，

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

ここで，

$$\int_{\mathrm{APB}} f(z)\,dz：\mathrm{A} \to \mathrm{P} \to \mathrm{B}\text{の積分},\ \int_{\mathrm{BQA}} f(z)\,dz：\mathrm{B} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{A}\text{の積分}$$

とすると，

$$0 = \int_C f(z)\,dz = \int_{\mathrm{APB}} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{BQA}} f(z)\,dz$$

が成立する．よって，

$$\int_{\mathrm{APB}} f(z)\,dz = -\int_{\mathrm{BQA}} f(z)\,dz$$

積分経路を逆にすることにより

$$\int_{\mathrm{APB}} f(z)\,dz = \int_{\mathrm{AQB}} f(z)\,dz$$

故に，点Aから点Bへの経路の積分が，領域 D 内での経路によらない．■

② 多重連結領域での積分
Proposition 3.3　外側の閉曲線 C_1 に沿った周回積分と内側の閉曲線 C_2 に沿った周回積分は等しい．つまり

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

が成り立つ．

③ 閉曲線の内側に閉曲線が複数ある場合
　閉曲線 C_1 の内側に閉曲線 C_2，C_3 が 2 つある場合を考える．このとき，次が成り立つ．
Proposition 3.4　関数 $f(z)$：3 つの閉曲線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた領域 D において正則

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz$$

同様にして，一般的に次も成り立つ．
Proposition 3.5　関数 $f(z)$：n 個の閉曲線 C_1，C_2，・・・，C_n で囲まれた領域 D において正則

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{C_3} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

D．コーシーの積分公式

　コーシーの積分公式以外にも重要な関係式が存在する．それが以下のコーシーの積分公式である．
Theorem 3.3　関数 $f(z)$：領域 D で正則　C：単純閉曲線　点 $z = a$：C の内部にある　とする．
このとき，次の関係式が成り立つ．

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

これを**コーシーの積分公式**と呼ぶ.

∵　閉曲線 C'：閉曲線 C の内側にあり，点 $z=a$ を中心とする半径 r の円とする.

関数 $f(z)$：閉曲線 C と C' の間で正則　であるので，$\dfrac{f(z)}{z-a}$ も正則．コーシーの積分定理より，

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_{C'} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

が成り立つ．ここで，閉曲線 C' 上の点 z を偏角 θ と半径 r を用いて表すと，

$$z=a+re^{i\theta}\quad \text{すなわち}\quad z-a=re^{i\theta}$$

この両辺を偏角 θ で微分すると

$$\frac{dz}{d\theta}=\frac{da}{d\theta}+r\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}=ire^{i\theta}$$

よって，

$$dz=ire^{i\theta}$$

また偏角 θ は 0 から 2π まで積分すればよいので

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-a}dz=\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta$$

ここで，半径 r を無限に小さくとっても左辺の積分の値は変化しないので，$r\to 0$ とすると

$$\int_{C'} \frac{f(z)}{z-a}dz=i\int_0^{2\pi}f(a)d\theta=2\pi i f(a)$$

以上より，

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$$

を得る.　■

　このコーシーの積分公式を使うことにより，次を得る.

Theorem 3.4　関数 $f(z)$：領域 D で正則，C：単純閉曲線，点 $z=a$：C の内部にある　とする.
このとき，C の内部の点 a に対して n 階導関数 $f^{(n)}(z)$（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）の値が定まり，

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

が成り立つ．これを n 階導関数の積分公式と呼び，これは領域 D の中の正則関数 $f(z)$ は，領域 D の中で何回でも微分可能であることを意味している.

さらに次の２つの重要な定理も導くことができる.

Theorem 3.5（リューヴィルの定理）　複素平面上で正則かつ有界な複素関数は定数関数である.

Theorem 3.6（代数学の基本定理）　複素係数の方程式（ただし，$a_n\neq 0$，$n\geq 1$）

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+a_1z+a_0=0$$

は，複素数解を持つ.

Lemma 3.1　次の関係式が成り立つ.

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n=-1) \end{cases} \quad ただし，n：整数$$

E．テイラー展開・ローラン展開

Theorem 3.7　関数 $f(z)$：点 a を中心とする半径 R の円板 $C(a,\ R)$ の内部で正則
このとき，すべての $z \in C(a,\ R)$ に対して，次が成り立つ．

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdot\cdot\cdot \quad (3\text{-}3)$$

これを関数 $f(z)$ の**テイラー展開**といい，右辺のべき級数を**テイラー級数**という．

Note 3.3　(3-3)において，$a=0$ とすると，次が成り立つ．

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdot\cdot\cdot \quad (3\text{-}4)$$

これを関数 $f(z)$ の**マクローリン展開**という．

Example 3.1　指数関数 e^z，三角関数 $\sin z$，$\cos z$ は複素数平面全体で正則であるので，原点を中心とする任意の半径 R の円板 $C(0,\ R)$ に対して Thm 3.7を適用することができる．すなわち，任意の複素数 z に対して，

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdot\cdot\cdot$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdot\cdot\cdot$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdot\cdot\cdot$$

が成り立つ．

Definition 3.3　関数 $f(z)$ が $z=a$ で正則でない　⇔　点 a を特異点という

Example 3.2　$f(z) = \dfrac{1}{z-2i}$ とすると $z=2i$ は特異点である．

先ほど見たテイラー展開（マクローリン展開）において，点 a において関数 $f(z)$ を展開するためには，点 a において関数 $f(z)$ が正則でなければならない．したがって，特異点が存在する場合においては，テイラー展開を使うことは不可能である．その時に有効なのが次のローラン展開である．

Theorem 3.8　関数 $f(z)$：点 a を中心とする次の円環領域 D を含む領域上で正則

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2 \} \quad (0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty)$$

このとき，D 上の中心 a 半径 r $(R_1 < r < R_2)$ の円 C を1つ定め，整数 $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdot\cdot\cdot$ に対して

$$A_n := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

とおくとき，任意の z に対して次の等式が成り立つ．

$$f(z) = \cdot\cdot\cdot + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdot\cdot\cdot$$

つまり

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{-m}}{(z-a)^m}\quad(3\text{-}5)$$

これを関数$f(z)$のaを中心とする**ローラン展開**といい，右辺のべき級数を**ローラン級数**という.

この式から分かることとして，次がある.

Fact 3.2　A_{-m} ($m=1, 2, 3, \cdots$) のいずれか1つが0でない　⇒　$z=a$は特異点である

Definition 3.4　ローラン展開(3-5)において，負べき$\dfrac{A_{-1}}{z-a}$，$\dfrac{A_{-2}}{(z-a)^2}$，・・・の項をローラン展開(3-5)の主要部という.

また，

（ｉ）$A_{-2}\neq 0$，$A_{-3}=A_{-4}=\cdots=0$のときの特異点aを2位の極

（ⅱ）$A_{-1}\neq 0$，$A_{-2}=A_{-3}=\cdots=0$のときの特異点aを1位の極

（ⅲ）一般的に，ローラン展開(3-5)の主要部が有限個の（0でない）項からなるとき，すなわち，ある自然数kが存在して，$A_{-k}\neq 0$かつ

$$f(z)=\frac{A_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots$$

とかけるとき，特異点aをk位の極

（ⅳ）ローラン展開(3-5)の主要部が存在しないときの特異点aを除去可能な特異点

（ｖ）ローラン展開(3-5)の主要部が無限個の（0でない）項からなるときの特異点aを真性特異点

という.

Example 3.3　関数$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$について考える．関数$f(z)$：$\mathbb{C}-\{0\}=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<\infty\}$で正則

また，特異点は$z=0$である.

ここで，$\sin z$にマクローリン展開を用いると$z\neq 0$のとき

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$$

となり，負べきの項をもたないため，$z=0$は$f(z)$の除去可能な特異点である．またこのとき，$f(0):=1$と定義することにより，関数$f(z)$は複素平面上で正則となる.

F．留数と留数定理

Definition 3.5　関数$f(z)$：点aを中心とする穴あき円板$\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-a|<R\}$を含む領域上で正則さらに，ローラン展開$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$をもつとする．このとき，$(z-a)^{-1}$の係数$A_{-1}$を関数$f(z)$の$a$における留数といい

$$\mathrm{Res}\,(f(z), a)$$

と表す.

唐突に，係数A_{-1}を特別扱いする理由は以下の定理によるものである.

Theorem 3.9（積分と留数）　関数$f(z)$：点aを中心とする穴あき円板$\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-a|<R\}$を含む領域上で正則　さらに，ローラン展開$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$をもつとする．このとき，領域$D$内の中心$a$，半径$r$の円$C$が$0<r<R$を満たすとき，

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\,A_{-1}=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z), a)$$

が成り立つ．

∵　点 a を中心とする半径 r の円（ただし，$0<r<R$）とする．このとき，Lem 3.1 より，

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n=-1) \end{cases} \quad \text{ただし，} n\text{：整数}$$

であるので，ローラン展開を用いると

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n \right) dz$$

であるので

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n \int_C (z-a)^n dz) = 2\pi i\, A_{-1}$$

Note 3.4　なおここでは，無限和と積分の順序交換の操作を証明なく使用している．詳しい証明は[7]を参照のこと．

以上により，関数 $f(z)$ を特異点 a のまわりでローラン展開してから積分することにより，留数 A_{-1} を含む項のみ「留まり」，それ以外の項が消えてしまうことが分かる．

以下では留数の求め方について $n=3$ の場合を例にして考える．すなわち，関数 $f(z)$ が次のように 3 位の極を持つローラン級数に展開できる場合を考える．

$$f(z) = \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdot\cdot\cdot$$

Step.1　両辺に $(z-a)^3$ をかける

$$(z-a)^3 f(z) = A_{-3} + A_{-2}(z-a) + A_{-1}(z-a)^2 + A_0(z-a)^3 + A_1(z-a)^4 + A_2(z-a)^5 + \cdot\cdot\cdot$$

Step.2　右辺の $(z-a)^2$ を消去するために両辺を z で微分する

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2}\{(z-a)^3 f(z)\} &= \frac{d^2}{dz^2}\{A_{-3} + A_{-2}(z-a) + A_{-1}(z-a)^2 + A_0(z-a)^3 + A_1(z-a)^4 + A_2(z-a)^5 + \cdots\} \\ &= \frac{d}{dz}\{A_{-2} + 2A_{-1}(z-a) + 3A_0(z-a)^2 + \cdot\cdot\cdot\} \\ &= 2A_{-1} + 6A_0(z-a) + \cdot\cdot\cdot \end{aligned}$$

Step.3　両辺の $z \to a$ の極限をとる

$$\lim_{z\to a} \frac{d^2}{dz^2}\{(z-a)^3 f(z)\} = \lim_{z\to a}\{2A_{-1} + 6A_0(z-a) + \cdot\cdot\cdot\} = 2A_{-1}$$

以上より，

$$A_{-1} = \frac{1}{2} \lim_{z\to a} \frac{d^2}{dz^2}\{(z-a)^3 f(z)\}$$

を得る．

一般に，n 位の極を持つローラン級数の場合も同様にして考えることにより，次のようにして求めることができる．

$$A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

Theorem 3.10（留数定理）　関数 $f(z)$：単純閉曲線 C と C の内部から互いに異なる点 a_1, a_2，・・・，a_n を除いた領域 D において正則　とすると，このとき次が成り立つ．

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\ \{\mathrm{Res}(f(z),a_1) + \mathrm{Res}(f(z),a_2) + \cdots + \mathrm{Res}(f(z),a_n)\}$$

すなわち

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f(z),\, a_k)$$

これを**留数定理**と呼ぶ．

この定理の意味は，左辺の単純閉曲線 C を経路とする関数 $f(z)$ の積分は，単純閉曲線 C の内側にある留数の和をとり $2\pi i$ をかけることで求めることができるということである．

この定理を利用することにより，様々な積分の計算が簡単に求めることができる．

Ⅳ．留数定理を用いた実関数の積分への応用例

高等学校数学Ⅲの積分法において次のような積分が扱われている．

Example 4.1　次の不定積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$　　　(2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

この解法は高等学校では次の２通りの解法で解くことができる．(1)，(2)ともに同様にして解くことができるためここでは(1)についてのみ扱うものとする．

【解法１】　$\sin x = t$ とおくと $\cos x dx = dt$ であるので

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt$$

より

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}(-\log|1-t| + \log|1+t|) + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$$

となる．（$\because$ $\cos x \neq 0$ より $\sin x \neq \pm 1$ であるので，$1+\sin x>0, 1-\sin x>0$）（ただし，C：積分定数）■

【解法２】　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおき両辺を t で微分する．

$$1 = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(1+t^2)\frac{dx}{dt}$$

より

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

また，

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

以上より

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

となる．したがって，

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$$

より

$$\int \frac{dx}{\cos x} = (-\log|1-t| + \log|1+t|) + C = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

■

そして，これらを少し応用した問題が次のような問題である．

Example 4.2　次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{1}{4+5\sin x}\, dx$$

【解】次の２段階により求めていく．

Step.1　先ほどと同様にして，$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくことにより，$\sin x$ を t を用いて表す．

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Step.2　$\tan\frac{x}{2} = t$ の両辺を微分すると $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$

$$\int \frac{1}{4+5\sin x}\, dx = \int \frac{1}{4+\frac{5\cdot 2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1}{2t^2+5t+2}\, dt = \int \frac{1}{(2t+1)(t+2)}\, dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{2}{2t+1} - \frac{1}{t+2}\right) dt$$

であるので

$$\int \frac{1}{4+5\sin x}\, dx = \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{2}\log|2t+1| - \log|t+2|\right) + C = \frac{1}{3}\log\left|\frac{2t+1}{t+2}\right| + C = \frac{1}{3}\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}+2}\right| + C$$

となる．（ただし，C：積分定数）　■

これの定積分版が次である．例として次のような問題を考える．

Example 4.3　次の定積分を求めよ．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}\, d\theta$$

一見すると，先ほどと同じように $\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおくことにより少し計算すれば解けそうに思えるが，積分区間が 0 から 2π となっているため簡単にはいかない．

実際，$\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおき，以下のように考える．

$$f(\theta) = \int \frac{1}{5+3\cos\theta}\, d\theta$$

とおく．このとき，$\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおくと次のようになる．

$$f(\theta) = \int \frac{1}{5+3\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{t^2+4}\, dt = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

ここで，

$$0 \leq \theta < \pi \text{ のとき}\quad 0 \leq t < \infty$$

$$\pi < \theta \leq 2\pi \text{ のとき}\quad \infty < t \leq 0$$

となるので，$\theta = \pi$ のとき ∞ に発散するため定義されない．そのため，定積分を求める際に次のようにしなければならない．

$$\{f(2\pi)-f(\pi+r)\}+\{f(\pi-r)-f(0)\} \to \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ \ (r\to 0)$$

というように定義されない点（この場合は $\theta=\pi$）が出てきて定積分を求める際に少し工夫が必要になる[26].

そこでこのような問題の場合，留数定理を利用することで実関数の積分も簡単に解くことができることを紹介する．一般に次のことが分かっている．

Fact 4.1　$F(x,\ y)$：文字 x，y に関する実数を係数にもつ多項式もしくは有理式
$F(\cos\theta,\ \sin\theta)$：実数 θ に関して連続　のとき，C：単位円　とすると

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\ \sin\theta)\,d\theta=\int_C F\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\ \frac{z-z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$$

∵　題意より，C：単位円　より，

$$z=z(\theta)=e^{i\theta}\ (0\leq\theta\leq 2\pi)$$

とパラメータ表示することができる．この両辺を θ で微分すると

$$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}$$

であるので，

$$d\theta=\frac{1}{ie^{i\theta}}dz=\frac{1}{iz}dz$$

また，

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z+z^{-1}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\end{cases}$$

であるので主張を得る．

これを利用して，先ほどの問題（Ex 4.3）を解く．

【解】上記の関係式を代入すると

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta=\int_C\frac{1}{5+3\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}dz=\frac{2}{i}\int_C\frac{1}{3z^2+10z+3}dz$$

となり，実積分を複素積分に変換することができる．ここで，右辺の被積分関数を $f(z)$ とおくと，

$$f(z)=3z^2+10z+3=3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)$$

より，関数 $f(z)$ は複素平面から -3，$-\frac{1}{3}$ を除いた領域において正則である．そのうち，半径1の積分路 C の内部にある特異点は $z=-\frac{1}{3}$ であるので，留数定理より

$$I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(f(z),-\frac{1}{3}\right)$$

ここで，

$$\mathrm{Res}\left(f(z),-\frac{1}{3}\right)=\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3(z+3)\left(z+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{8}$$

よって，

$$I=\frac{\pi}{2}$$

となる．

このようにして，関数$f(\cos\theta,\ \sin\theta)$の積分において，積分区間$\theta$が0から$2\pi$までの場合，上記の関係を使うことで半径1の複素平面上の円を積分経路にとるような複素積分に変換することで積分を求めることができる．このような問題を考える際，先ほどの留数定理を用いると非常に見通しよく問題を解くことができる．

Ⅴ．まとめ

本稿では，高等学校段階の数学の内容で複素関数論の内容を扱えるものを考察し，実際にそれらを用いて実関数の積分を複素積分（留数定理）を用いて求めることを行った．留数定理や留数を求める計算は数学の得意な生徒や意欲的な生徒であれば説明すればきっと理解できる内容である．今回はできなかったが，実際に自分の手を動かしながら様々な積分を求めることで複素積分（留数定理）を用いることの有用性が分かるであろう．

筆者（上野）の高等学校での経験であるが，数学Ⅲの積分を一つとっても，生徒は解法（変数変換の方法）を丸暗記するのみである．すなわち，この形の積分はこう解く，あの形の積分はああ解くといった感じで置き換えの仕方を暗記し，そこにある数学的な意味を考えることはあまりない．また，どの参考書を見ても，それが分かりやすいようにフローチャートに書いてある．もう少し言えば，高等学校で扱う積分は簡単に解くことができる積分ばかりである．一般的には高等学校で扱わない積分の方がずっと多いわけである．そのような意味で大学に入り，今まで数学が得意であった生徒が大学数学につまずいてしまう要因がそういうところにあるかもしれないと筆者（村瀬）は危惧している．

今回は，実積分を複素積分にすることで見通し良く積分を考えることができることが分かった．Ⅲ，Ⅳで見てきたように，高等学校の数学でⅢの内容をすべて理解するのは難しいかもしれない．特に今回は詳しく述べなかったが，数列と級数の収束性には$\varepsilon-N$論法，関数の連続性と一様連続性には$\varepsilon-\delta$論法で定式化する必要がある．これらの内容はなかなか大学生でもとっつきにくい内容のため，初めて学習するときには困惑するものである．しかし，それらを仮定すれば数学に興味のある高校生ならばおおむね理解できる内容ではないかと考える．特に最後に述べた留数定理は知っておくと，実際の実積分の計算が簡単になったり，積分できる範囲が増える．逆に言うと，高校で扱われている積分の問題がいかに狭い範囲のものを扱っているかに気付くことができるであろう．そういう意味で,実数から複素数,実積分から複素積分を扱うことにより，世界が広がり，数学の良さがを実感してもらえるのではないかと考える．

参考文献

[1] 文部科学省(2019).「新学習指導要領における高等学校数学等について」
[2] 高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説　数学編　理数編
[3] 文部科学省検定済教科書(2017)「改訂版　数学Ⅱ」，数研出版
[4] 文部科学省検定済教科書(2018)「改訂版　数学Ⅲ」，数研出版
[5] 原岡善重(2018).「はじめての解析学」，岩波書店
[6] 竹内淳(2019).「高校数学でわかる複素関数」，岩波書店
[7] 川平友規(2019).「入門　複素関数」，裳華房
[8] R.V.チャーチル，J.W.ブラウン著　中野實訳(2012).「複素関数入門 原書第4版 新装版」，数学書房

[9] 桑田孝泰・前原潤(2017).「複素数と複素数平面－幾何への応用－（数学のかんどころ33)」，共立出版
[10] 新井仁之(2018).「正則関数（数学のかんどころ36)」，共立出版
[11] 新井仁之(2018).「有理型関数（数学のかんどころ37)」，共立出版
[12] 岡本和夫(2013).「新版応用数学」，実教出版
[13] 三宅敏恒(1992).「入門　微分積分」，培風館
[14] 高木貞治(2010).「定本　解析概論」，岩波書店
[15] 杉浦光夫(1980).「解析入門Ⅰ」，東京大学出版会
[16] 杉浦光夫(1985).「解析入門Ⅱ」，東京大学出版会
[17] S.ラング著　松坂和夫，片山孝次訳(1978).「解析入門原書第３版」，岩波書店
[18] S.ラング著　松坂和夫，片山孝次訳(1981).「続解析入門原書第２版」，岩波書店
[19] 矢野健太郎，石原繁(2020).「新装版　解析学概論」，裳華房
[20] 原岡喜重(2021).「解析学基礎」，共立出版
[21] 神保道夫(2003).「複素関数入門」，岩波書店
[22] 木村俊房，高野恭一(1991).「関数論」，朝倉書店
[23] 今吉洋一(1997).「複素関数概説」，サイエンス社
[24] 洲之内治男，猪股清二(1992).「改訂　関数論」，サイエンス社
[25] 難波誠(1990).「複素関数　三幕劇」，朝倉書店
[26] 山田泰彦．private mail

Mathematics Based on Cooperation between The High School and The University
―Connection between complex numbers, complex planes, and complex analysis―

UENO Yuichi ・ MURASE Masatoshi

Abstract: Negative numbers are introduced in junior high school mathematics, and we know that (negative number) × (negative number) = (positive number). Alternatively, squaring a non-zero number results in positive number under real numbers' domain.

In this paper, we consider a new number, i (imaginary unit), whose square is − 1. We also deal with complex numbers, which are introduced in high school mathematics. Integers are extended to rational numbers, and rational numbers are extended to real numbers. Similarly, we investigate whether there are any benefits in extending real numbers to complex numbers.

Complex numbers have numerous advantages. Especially, these include the ability to apply differential and integral calculus theory to complex numbers and have observed some distinguishing characteristics that are only possible in the complex number differential and integral calculus (this is called complex analysis). In this paper, we will evaluate the advantages of these properties in comprehending contents with the knowledge of high-school mathematics.

Keywords : complex numbers, complex plane, complex analysis, real integral, complex integral, residue theorem