

数学教育における代数学，幾何学，解析学，確率・統計の統合 — コンピューター科学の最前線から —

村瀬 雅 俊¹⁾ ・ 上 野 祐 一²⁾

要旨：解析学，計算機科学，代数・幾何学，確率・統計学など，私たちは異なる数学分野としてバラバラに学んでいる．物理学と数学の総合，生物と物理学の統合，数学と神経科学の対話などを通して，これまで統一的に理解することができなかった複雑生命現象を，単純なモデルを構築することによって理解することが可能となってきた．その展開過程に焦点を当てて論考したい．

キーワード：複雑系生命科学，数理モデル，偏微分方程式，計算機シミュレーション

1. はじめに

疑問は単純であればあるほど，答えるのが難しい．数学教育において「数学とは何か？」という疑問を真剣に問う機会は少なかった．それは，学ぶ立場でも教える立場でも同じである．2006年の秋，数学者・津田一郎（当時，北海道大学・理学部数学科・教授）に「進化とは何か？」と尋ねたことがある．しばしの沈黙に続いて，「そのような，いわゆる進化の定義は，一連の研究が終了する頃に，おのずとみえてくるのではないか」という発言であった．

それから15年が過ぎ，この種の問いにはアブダクション（転移）という方法で，答えを自得できることに気づき始めた．この方法は，どのような問題を考えるかということに関わらず，普遍的に活用することができる．数学を学ぶ際の本質は，バラバラな分野についての詳細な定理や公式の理解に留まらず，それらを1つの全体として捉える統合的な視点を自得できるか否かにかかっている．そのためには，具体的な自然現象に目を向けてみるということも必要になってくる．

本稿では，筆者の一人である村瀬がかつて探究した未解決問題をいかにして解明できたかについて，もう一人の筆者である上野とともにメタ数学的な視点から総括しながら，数学教育の新たな方法の可能性を論考する．

2. 創造性を育む数学教育 — “未知の未知” への挑戦

単純でありながら，答えることが困難な疑問として，「創造性とは何か？」という疑問を考えてみたい．実は，この疑問について論考することが，先に挙げた「数学とは何か？」「進化とは何か？」を論考することに深く関連するのである．その気づきを得ること — すなわち，後述する「連合」やアブダクション —こそが，「創造性とは何か？」について頭で考えるだけでなく，直観を頼りに実践する方法論に他ならない．これまでの自然科学における要素還元論では，要素ばかりとらわれてきた．例えば，ダーウィン進化論では，生態系を構成している生物個体である要素に自然選択原理が働くという暗黙裡の前提があった（Keller, 1993）．しかし，この前提を再検討する必要があるように思われる．

1) 京都大学基礎物理学研究所 2) 皇學館大学教育学部

要素の数が劇的な変化しなくても、古い見方が捨てられることで、突如として新たな次元が開示される。それが、“未知の未知（知っていないことを知らないこと）”への挑戦である。実際に、アインシュタインは実験も行わず、新しい情報も集めずに、相対性理論を生み出した。古い情報を新しいやり方で捉え直したに過ぎない。しかも、理論の正しさが実験で検証されたのは、後になってからである。ここに、動物行動学者のローレンツ（1973）が指摘した「連合」—すなわち、それまで互いに独立して存在していたシステム同士の相互作用の出現—に代表される、進化や創造性の本質が隠されている。こうした普遍性を考えることが、実は、数学教育の本質を探ることに繋がる。

なぜ、そのように言えるのだろうか。具体例を挙げてみると、以下に示すように物理現象から生命現象、そして精神現象に至るまで、実に多様な現象がある。新たな秩序形成や機能発現を伴う相転移現象（Kauffman, 1993; Pollack, 2001; 2010）、生体の誕生・発生・成長・老化現象（Murase, 1996; 村瀬, 2000; 2001; 2008; 2010）から、予期できない疾患の発生や新理論の構築につながる認識の飛躍（市川, 1993）、「類推」や「同定」に基づく学問の発展（湯川, 1949）、すぐれた芸術作品を鑑賞する際に体験される価値生成（中村, 2006）、経験の意識的および無意識的な刻印や主体の運命への深刻な影響（アンセルメ, マジストレッティ (2004)、そして禅修行における悟りの境地（ユング, 1939）や神秘体験（ニューバーグ, ダギリ, ローズ, 2001）に至るまで、幅広く存在している。これらの諸現象の相違は、単に時間スケールと空間領域の相違に過ぎず、その根底に働く普遍原理こそ、自己・非自己循環原理（村瀬, 2000）として探求できるのではないだろうか。ここに、これから主張していきたいアプローチがある。

このアプローチに基づくと、進化を狭義の生物進化よりはるかに広い創造性という一般問題として考察できる。この一般問題の特殊な場合として、進化の問題を議論できる。そのイメージは、以下の図式（図1）で捉えることができる。

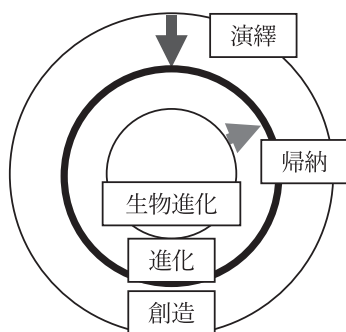


図1a 帰納（特殊から一般へ）と演繹（一般から特殊へ）

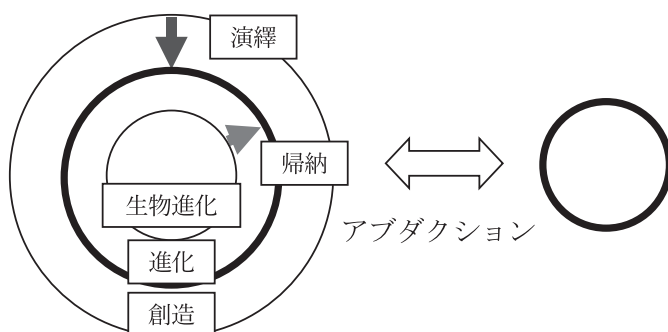


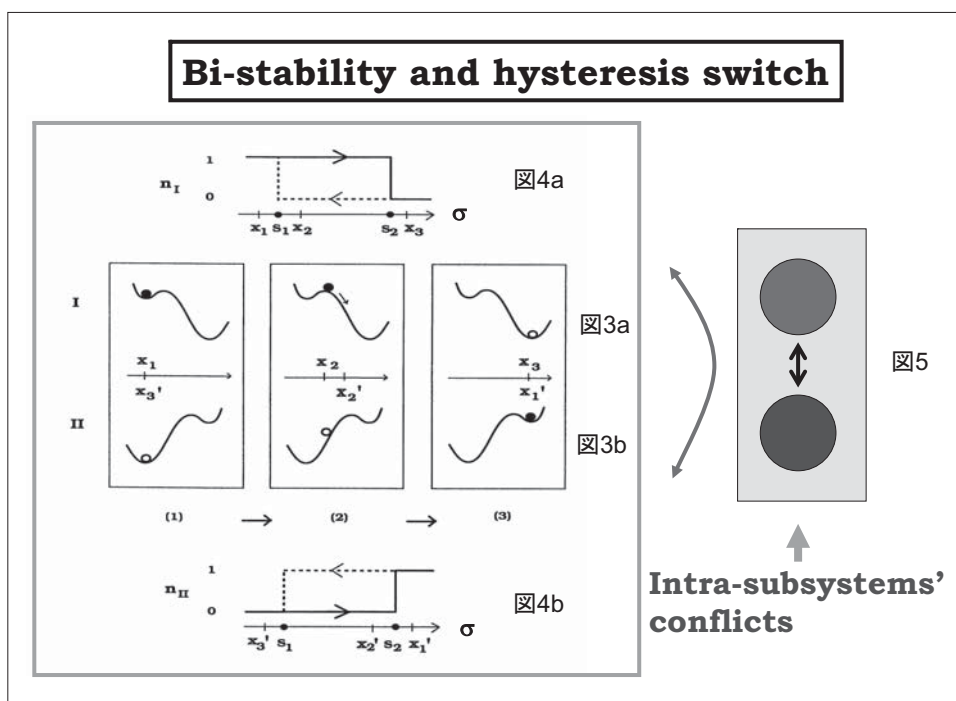
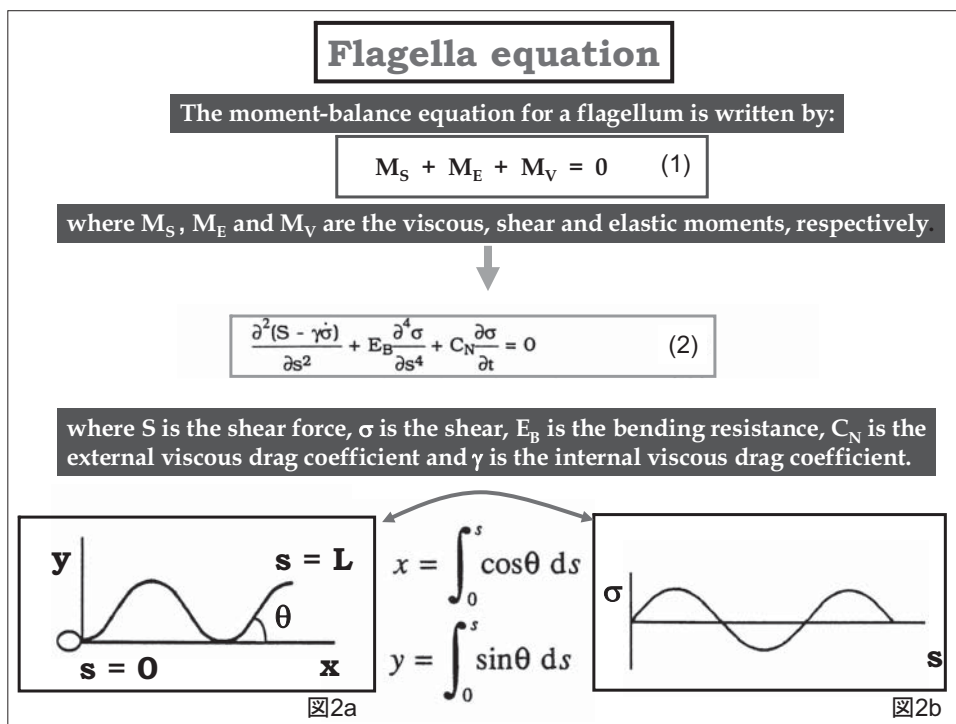
図1b 帰納（特殊から一般へ）と演繹（一般から特殊へ）とアブダクション

帰納と演繹だけでは（図1a）、創造性は生まれない。なぜなら、どちらの過程においても前提である特殊あるいは一般のなかにすでに答えが含まれているからである。数学教育・学習において、特に重要となるのはこの点である。計算すればできること、解析的に解ければ答えが得られること、幾何学的に捉えれば共通理解が得られること、そうした観点を踏まえさえすれば理解できるほどに、自然や社会や宇宙は単純ではない。

なぜなら、理解を深めるには、古い考え方を踏襲する一方で、それから脱却することが求められるからである。その学習と脱学習の方法として、焦点を当てている対象から、あえて視点をそらすアブダクションが重要となる（図2b）。これは数学や文学や芸術を創る過程そのものであり、それが、実は進化や創造性の本質でもある。

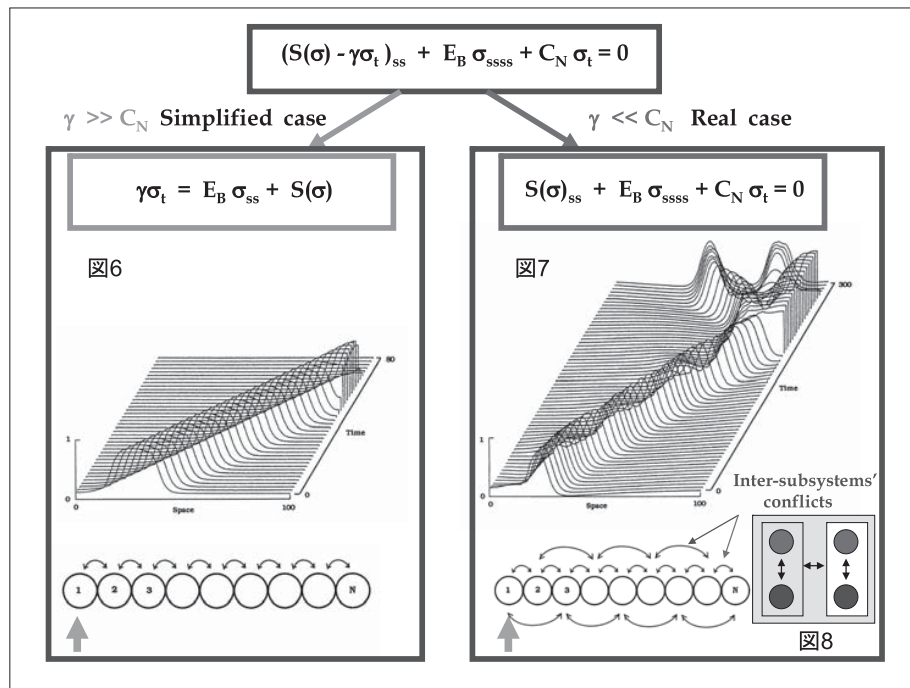
3. 生体運動—カオスの制御と秩序の生成—

以上の準備を踏まえて, 細胞運動である鞭毛運動のモデルの構築とその解析, 計算機実験を実施する. 精子の鞭毛運動は, 図 2a に示されているように, 平面運動で近似できる. 鞭毛に沿って空間座標 s ($0 \leq s \leq L$, L は鞭毛の長さ) を導入する. 鞭毛の屈曲運動は, 内部のフィラメントの滑り運動に起因する. 鞭毛の根元は, フィラメントの滑り運動は起こらない. そのために, 任意の点における屈曲角度 θ は, 滑り量 σ に比例する (図 2b). これらの前提のもとで, モーメントの釣り合いの方程式 (1) を立て, 鞭毛運動を記述する基礎方程式 (2) を導くことができる. S は, 滑り力である.



鞭毛の屈曲運動は、滑り力が交互に逆転することで創発する。その動力学を、互いに逆向きの力学ポテンシャル (図 3a, b) と滑り力の on-off が滑り量と運動履歴を示すヒステリシススイッチ関数 (図 4a, b) によって与える。図 5 は、鞭毛運動という対象理解が深まる過程を、再構成して捉える目的で描いている。簡単化のために、2つの対立する運動系を、2つの対立した○が1つの単位として統合されている様子を表している。

鞭毛の形状は、空間座標 s と滑り量 σ によって与えられる (図 2a, b)。上記の図 3, 4 によって規定される滑り力 S を、基礎方程式 (2) に代入して解の挙動を調べる。



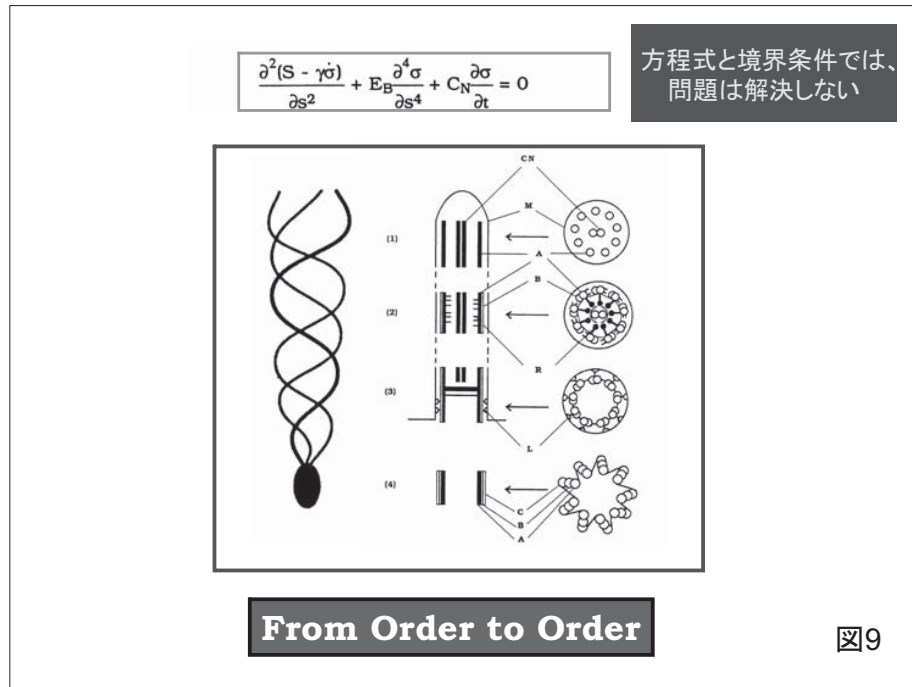
鞭毛内部の粘性抵抗 γ が、外部の粘性抵抗 C_N より十分に大きい場合を考える。基礎方程式 (2) は図 6 上部のように、時間 t に関する 1 階偏微分と空間 s に関する 2 階偏微分からなる偏微分方程式に帰着できる。この場合は、鞭毛における空間相互作用は、図 6 下に模式的に表したように、最近隣単位同士の引力的相互作用だけが働いている。この単純な引力的相互作用によって、鞭毛の左端に形成された屈曲は右端へスムーズに伝播する。

実際の場合、鞭毛内部の粘性抵抗 γ は外部の粘性抵抗 C_N よりも著しく小さい。そのため、基礎方程式は図 6 上部のように、時間 t に関する 1 階偏微分と空間 s に関する 2 階と 4 階の偏微分方程式になる。その様子は、最近接相互作用は斥力的となり引力的に働く次近接相互作用と拮抗する (図 7 下)。この空間次元に関する相互作用の対立が 1 つの鞭毛というシステムに共存する状況を、図 8 に示す。図 5 で表された 1 つの「内部対立する単位」と別の「内部対立する単位」との間の新たな対立がより高次の単位として統合されている。

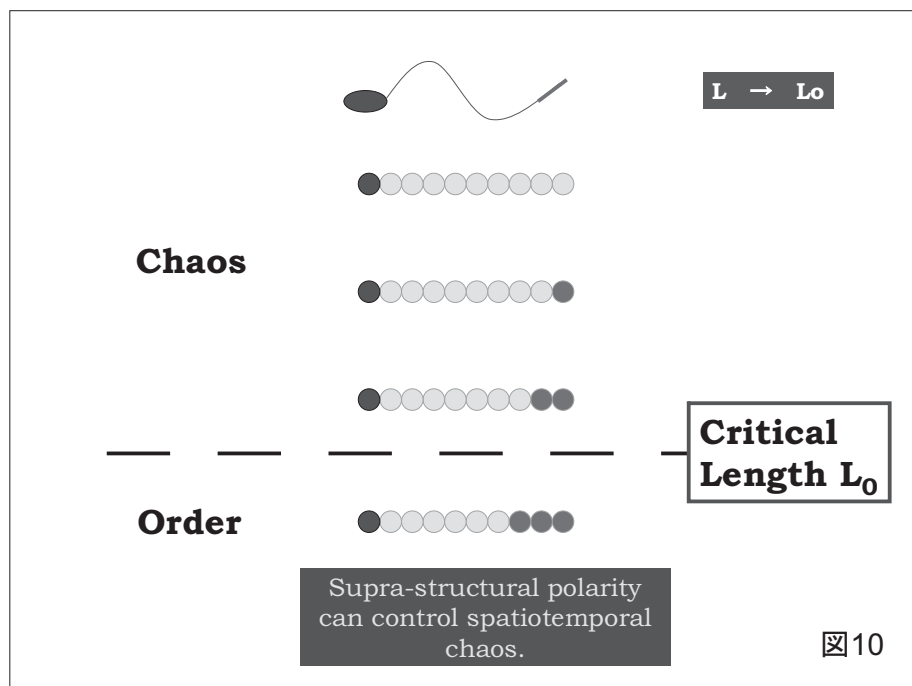
鞭毛内部の粘性抵抗 γ と外部の粘性抵抗 C_N との大小関係の相違による、数値計算の相違を図 6 と図 7 に示す。現実のパラメータは、先にも述べたように、図 7 のケースに対応する。その特徴は、1 つの屈曲波が反射したり、途中で分岐したり、合体したりする。実際、互いに逆向きに運動する 2 つの屈曲波は、ソリトンのように互いにすり抜ける。さらに、鞭毛に沿った空間座標が異なると、波長や周波数が異なる。実際に、このタイプの方程式は、時間・空間カオスを再現する Kuramoto-Sivashinsky 方程式と同じ構造を持っている (Murase, 1992)。

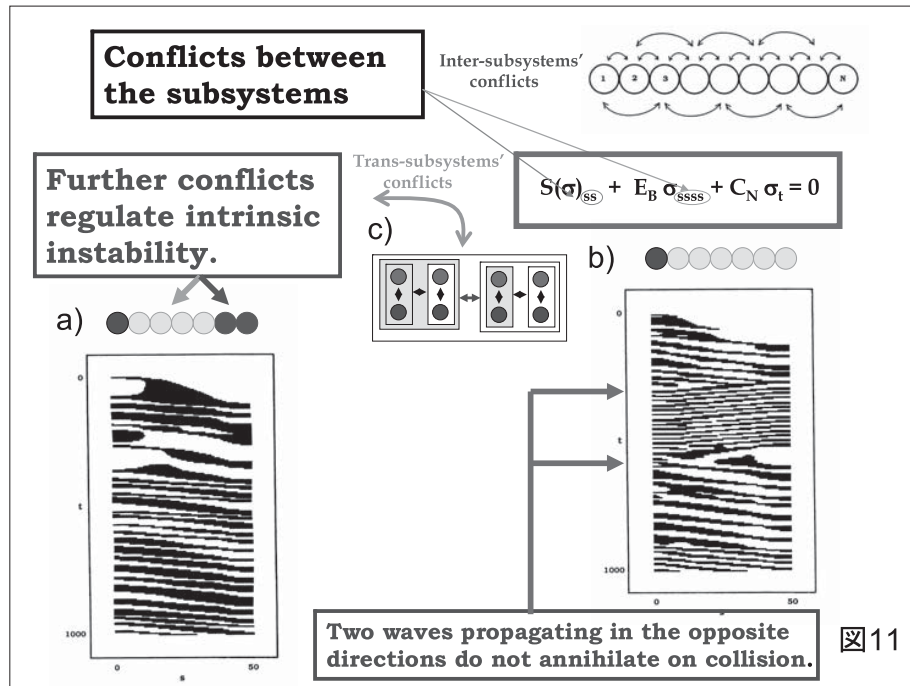
こうした多様な運動現象は、現実に観測されているのだろうか。さまざまな生物種の鞭毛運動を調べ

てみると，生物種の違いによって，多様な運動形態が報告されていた．ところが，別の生物種では，一方向にのみ屈曲運動が伝播するという秩序だった鞭毛運動パターンが報告されていた（Murase, 1992）．それでは，この時間・空間カオスを創発する鞭毛運動の基礎方程式から，どのようにして一方向にのみ運動を伝播する秩序ある鞭毛運動を再現できるのかが問題になる．これは，1950年代頃から半世紀近くの間，細胞運動に携わる研究者にとって，大変大きな「なぞ」であった．



この「なぞ」の解決策は，基礎方程式にはなかった．鞭毛両端の境界条件を，自由端や固定端などに置き換えて見たが，無駄であった．基礎方程式に基づく運動は，自己制御機構を保持していないからである．結論から言えば，問題解決の鍵は，鞭毛に沿った長軸方向の構造的非対称性にあった（Murase, 1992）．





これまで、鞭毛運動の理論を構築する際、鞭毛の構造的な異方性は全く考慮されていなかった。現実の鞭毛構造には、図9のように、鞭毛の先端領域はフィラメントの滑り運動を引き起こす‘運動性酵素’が存在していない。そこで、図10に模式的に示したように、その先端領域の長さ L を少しずつ長くしてみる。すると、ある臨界長 L_0 で、一方向の進行波が選択的に励起されるようになった。その様子を、図11aに示す。図11bは、先端領域の長さ L が0の場合、屈曲波の進行方向が逆転する様子を示している。図11cは、1つの「内部対立する単位」と別の「内部対立する単位」との間の対立がより高次の単位となり、それらが空間的位置の相違に関して互いに対立しながらさらに高次の単位として統合されていることを示している。

4. おわりに

本研究では、数学教育においてバラバラに捉えられがちな代数学、幾何学、解析学、確率・統計の統合をコンピューター科学の最前線から捉え直すことを試みた。生命現象や自然現象のモデルは、3次元空間を2次元平面に置き換えることで、理想化・単純化される。本稿では、細胞運動の方程式を2次元平面上の屈曲運動と単純化することで、偏微分方程式を比較的簡単にコンピューターを用いて数値解析することができた。

その際に、モーメントの釣り合いに基づく代数方程式、連続性に基づく幾何学的な数式表現、偏微分方程式を解析学的にモード計算する手法、細胞運動の運動性タンパク質の分子運動を表現する確率・統計的な記述、それらの全てを包括するモデルシステムをコンピューターによって数値解析した。しかし、ここで問題解決がなされたわけではなかった。鞭毛内部における幾何学的な非対称性の存在を、偏微分方程式の非対称性として取り入れることで、はじめてカオスから秩序への相転移を表現することができた。

問題解決には、数学的な素養に加えて直観的な視点、さらにはある種の芸術的な観点も必要ではないだろうか。数学教育の原点には、人間性の本質を忘れてはならない。

参考文献

- F. アンセルメ, P. マジストレッティ (2004) 『脳と無意識 — ニューロンと可塑性』 青土社 2006年
- 市川 浩『<身>の構造 — 身体論を超えて —』 講談社学術文庫 1993年
- G. M. エーデルマン『脳から心へ — 心の進化の生物学 —』 (金子隆芳 訳) 新曜社 1995年
- G. M. Edelman “Neural Darwinism: The Theory of Neuronal Group Selection” Basic Books, 1987
- A. オリヴェリオ『メタ認知的アプローチによる学ぶ技術』 (川本英明 訳) 創元社 2005年
- J. Cairns “Mutation selection and the natural history of cancer” Nature 255, 197-200, 1975
- Kauffman, S. A. “The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution” Oxford University Press 1993
- 郡司幸夫『生成する生命 — 生命理論 I』 哲学書房 2002年
- 郡司幸夫『私の意識とは何か — 生命理論 II』 哲学書房 2003年
- L. Keller “Levels of Selection in Evolution” Princeton University Press, 1999
- M. バーネット『免疫理論 — 獲得免疫に関するクローン選択説 —』 (山本 正, 大谷杉士, 小高 健 訳) 岩波書店 1981年
- 本庶 佑『生体の多様性発現における選択説 I』 科学 54, 324-331, 1894
- 本庶 佑『生体の多様性発現における選択説 II』 科学 54, 495-502, 1894
- E. H. レネバーク (1967) 『言語の生物学的基礎』 (佐藤方哉, 神尾昭雄 訳) 大修館書店 1974年
- K. ローレンツ (1973) 『鏡の背面 — 人間の認識の自然史的考察』 (谷口 茂 訳) 思索社 1974年
- 中村英樹『生体から飛翔するアート — 21世紀の《間知覚的メタ・セルフ》へ —』 水声社 2006年
- R. ニスベット『木を見る西洋人 森を見る東洋人 — 思考の違いはいかにして生まれるか』 (村本由紀子 訳) ダイアモンド社 2004年
- ニューバーク, E. ダギリ, V. ローズ『脳はいかにして<神>を見るか — 宗教体験のブレイン・サイエンス』 PHP研究所 (茂木健一郎 訳) 2003年
- G. ミラー『ことばの科学 — 単語の形成と機能 —』 東京化学同人 1997年
- M. Murase “The Dynamics of Cellular Motility” John Wiley & Sons, 1992
- <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/49123>
- M. Murase “Alzheimer’s Disease as Subcellular ‘Cancer’ — The Scale Invariant Principles Underlying the Mechanisms of Aging” Prog. Theor. Phys. 95, 1-36, 1996
- <http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/48880>
- M. Murase, Endo-exo circulation as a paradigm of life: towards a new synthesis of Eastern philosophy and Western science, pp. 1-10, in Murase, M. and Tsuda, I. Eds., What is Life? The Next 100 Years of Yukawa’s Dream, Progress of Theoretical Physics, Supplement 173, 2008
- M. Murase, Environmental pollution and health: an interdisciplinary study of the bioeffects of electromagnetic fields, SNSAI, An Environmental Journal for the Global Community, No.3, 1-35, 2008
- M. Murase, The origin and evolution of life by means of endo-exo (or self-nonself) circulation, Viva Origino 39(1)7-10, 2011
- 村瀬雅俊『歴史としての生命 — 自己・非自己循環理論の構築 —』 京都大学学術出版会 2000年
- P. C. Nowell “The clonal evolution of tumor cell populations: acquired genetic ability permits stepwise selection of variant sublines and underlies tumor progression. Science 194, 23-28, 1976
- J. ピアジェ『発生的認識論』 (滝沢武久 訳) 文庫クセジュ 1972年
- J. ピアジェ (1952) 『知能の心理学』 (波多野完治, 滝沢武久 訳) みすず書房 1960年

- Pollack, G. "Cells, Gels and the Engines of Life: A New, Unifying Approach to Cell Function" Ebner & Sons, 2001
- Pollack, G. "Phase Transitions in Cell Biology" Springer 2010
- 鈴木良次「生物的自律性」『岩波講座 宗教と科学 6 生命と科学』（編集委員 河合隼雄, 清水博, 谷泰, 中村雄二郎）242-267, 1993年
- ノーム・チョムスキー『生成文法の企て』（福井直樹, 辻子美保子 訳）岩波書店（インタビュー集）2003年
- ノーム・チョムスキー『言語と認知 — 心的存在としての言語 —』（加藤泰彦, 加藤ナツ子 訳）秀英書房（日本での講演録）2004年
- ノーム・チョムスキー『文法の構造』（勇 康雄 訳）研究社 1963年
- C.G.ユング（1939）「禪の瞑想 — 鈴木大拙によせて —」『東洋的瞑想の心理学』（湯浅泰雄, 黒木幹夫 訳）創元社 1983年
- C.G.ユング（1921）『タイプ論』（林 道義 訳）みすず書房 1987年
- C.G.ユング（1936）『元型論』（林 道義 訳）紀伊国屋書店 1999年
- C.G.ユング（1939）「禪の瞑想 — 鈴木大拙によせて —」『東洋的瞑想の心理学』（湯浅 泰雄, 黒木幹夫 訳）創元社 1983年
- C.G.ユング（1963）ユング自伝1— 思い出・夢・思想 —（河合隼雄, 藤縄 昭, 出井淑子 訳）みすず書房 1972年
- C.G.ユング（1963）ユング自伝2— 思い出・夢・思想 —（河合隼雄, 藤縄 昭, 出井淑子 訳）みすず書房 1973年
- C.G.ユング, W.パウリ（1955）『自然現象と心の構造 — 非因果的連関の原理 —』海鳴社 1976年
- F.ヴァレラ, E.トンプソン, E.ロッシュ『身体化された心 — 仏教思想からのエナクティブ・アプローチ』（田中康夫 訳）工作舎 2001年
- H.ワイル『数学と自然科学の哲学』（菅原正夫, 下村寅太郎, 森繁雄 訳）岩波書店 1959年
- 湯川秀樹（1949）『湯川秀樹著作集1 学問について』（科学的思考について）岩波書店 23-40, 1989年

Integration of Algebra, Geometry, Analysis, Probability and Statistics
in Mathematics Education:
From the forefront of computer science

MURASE Masatoshi · UENO Yuichi

Abstract: We usually have studied different subjects such as analysis, computer science, algebra, geometry, probability theory and statistics in quite a separate way. Because of such a traditional education system, we often failed to understand complex life phenomena completely. However, by developing simple theoretical models, it is possible to understand complex life phenomena in an integrated way. Of course, for this purpose, it is necessary to make tight bridges between physics and mathematics, between biology and physics, between mathematics and neuroscience and so on. The present paper intensively showed how such integrated processes developed.

Keywords: Complex life science, mathematical model, partial differential equations,
computer simulations